УДК 514.7

ОБ ИНДИКАТРИСЕ КРИВИЗНЫ ДВУМЕРНОЙ ПОВЕРХНОСТИ НА ГИПЕРСФЕРЕ В ЧЕТЫРЕХМЕРНОМ ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВ

Е.В.Силаев

(Московский государственный педагогический университет)

В работе исследуются свойства прямой, на которой леж точки индикатрисы кривизны двумерной поверхности, лежащей гиперсфере в четырехмерном евклидовом пространстве, изучен различные способы ее расположения, а также рассмотрен вопр фокальности семейства таких прямых.

Рассмотрим двумерную поверхность V_2 на гиперсфере $S_3($ с центром O и радиуса r в евклидовом пространстве E_4. К ждой точке $x\in V_2$ присоединим подвижной репер $R=\{x,\vec e_i,\vec e_\alpha\}$, г $i,j=1,2;\ \alpha,\beta=3,4$, так, чтобы векторы $\vec e_i$ лежали в касательно пространстве к поверхности V_2 в точке x, а векторы $\vec e_\alpha$ об зовывали ортонормированный базис ортогонального дополнени указанному пространству. Направим вектор $\vec e_4$ вдоль вектора Деривационные формулы репера R имеют вид:

$$d\vec{Ox}=\omega^i\vec e_i,\quad d\vec e_i=\omega_i^j\vec e_j+\omega_i^\alpha\vec e_\alpha,\quad d\vec e_\alpha=\omega_\alpha^i\vec e_i+\omega_\alpha^\beta\vec e_\beta. \qquad (1$$

При смещении точки вдоль поверхности V_2 имеем: $\omega^\alpha=0$. Диф ренцируя эти равенства внешним образом и применяя лемму Ка на, получим $\omega_i^\alpha=b_{ij}^\alpha\omega^j$, $b_{ij}^\alpha=b_{ji}^\alpha$.

Дифференцируя равенство $\vec{Ox}=r\vec e_4$, с учетом формулы (1) линейной независимости векторов репера R, получим:

$$\omega^i=r\omega_4^i, \qquad (2$$

$$\omega_4^i=0. \qquad (2$$

Дифференцируя равенство $\vec e_\alpha\cdot\vec e_\beta=\delta_{\alpha\beta}$, где $\delta_{\alpha\beta}$ – символ некера, получим, что $\omega_\alpha^\beta+\omega_\beta^\alpha=0$, откуда с учетом формул (следует, что $\omega_3^3=\omega_4^4=0$ и $\omega_3^4=\omega_4^3=0$, т.е. $\omega_\alpha^\beta=0$.

Для поверхности $V_2\subset S_3(O,r)$ имеют место формулы (3) рабо [1], которые в рассматриваемом случае принимают вид:

$$r b_{ij}^4+\gamma_{ij}=0, \qquad (3)$$

где $\gamma_{ij}=\vec e_i\cdot\vec e_j$.

Относительно репера R запишем параметрические уравн индикатрисы кривизны поверхности V_2 в точке x [2]:

$$z^3=b_{ij}^3a^ia^j,\quad z^4=b_{ij}^4a^ia^j,$$

ричем

$$\gamma_{ij}a^ia^j=1. \qquad (4)$$

учетом формул (3) и (4) запишем уравнения индикатрисы кри изны следующим образом (не повторяя еще раз формулы (4)):

$$z^3=b^3_{ij}a^ia^j,\quad z^4=-\frac{1}{r}. \qquad (5)$$

ледовательно, точки индикатрисы кривизны поверхности V_2 в очке x принадлежат прямой ℓ_x, определяемой уравнением $z^4=-\frac{1}{r}$, ортогональной вектору $\vec{Ox}=r\vec e_4$.

Заметим, что если $b^3_{ij}=k\gamma_{ij}$, то уравнения системы (5) римут вид $z^3=k$, $z^4=-\frac{1}{r}$, т.е. индикатриса кривизны вырождается в точку с координатами $(k;-\frac{1}{r})$. Таким образом, индикатриса кривизны в общем случае не совпадает с прямой ℓ_x.

Очевидно, что точка H пересечения прямых ℓ_x и Ox: $z^3=0$ имеет координаты $(0;-\frac{1}{r})$. Следовательно, $\vec{xH}=-\frac{1}{r}\vec e_4$, т.е. $\vec{xH}=-\frac{1}{r^2}\vec{Ox}$, откуда находим, что:

) $\vec{xO}\cdot\vec{xH}=(\frac{1}{r})^2$, 2) $\vec{OH}=\vec{Ox}+\vec{xH}=(r-\frac{1}{r})\vec e_4$,

причем $|\vec{OH}|=|r-\frac{1}{r}|=const$. Таким образом, доказана

Теорема 1. Пусть поверхность V_2 лежит на гиперсфере $S_3(O,r)\subset E_4$, а прямые ℓ_x и Ox пересекаются в точке H. Тогда: 1) точки O и H инверсны относительно гиперсферы с центром x и радиуса $\frac{1}{r}$; 2) $r=1$ тогда и только тогда, когда $O\in\ell_x, \forall x\in V_2$; 3) если $r\neq1$, то при смещении точки x по поверхности V_2 точка H смещается по гиперсфере, концентрической с данной гиперсферой $S_3(O,r)$ радиуса $|r-\frac{1}{r}|$.

С учетом результатов работы [3] имеет место следующая

Теорема 2. Поверхность V_2, лежащая на гиперсфере $S_3(O,r)\subset E_4$, является минимальной по отношению к данной гиперсфере (не по отношению к пространству E_4) тогда и только тогда, когда в любой точке $x\in V_2$ прямая ℓ_x перпендикулярна средней нормали поверхности V_2.

Так как в любой точке x рассматриваемой поверхности V_2: $\vec M\cdot\vec{Ox}=-1$ (см. [1]), где $\vec M$ – вектор средней кривизны поверхности V_2 в точке x [2], то легко видеть, что косинус угла φ между прямой ℓ_x и средней нормалью в точке x вычисляется по формуле $\cos\varphi=\frac{1}{r|\vec M|}$, откуда следует, что $\cos\varphi=const$ (не зависит от выбора точки $x\in V_2$) тогда и только тогда, когда $|\vec M|=const$, т.е. V_2 – поверхность постоянной средней кривизны.

Как известно [4], поверхность V_2, лежащая на гиперсф $S_3(0,r)\subset E_4$, несет сопряженную ортогональную сеть Σ_2. Отне поверхность V_2 к сети Σ_2. Тогда $b^\alpha_{ij}=\gamma_{ij}=0$ $(i\neq j)$.

Рассмотрим гиперсферу, радиус которой отличен от 1. П положим, что $b^3_{11}\neq b^3_{22}, \forall x\in V_2$. Можно показать, что присоеди ненная кривая поверхности V_2 в точке x [2] распадается н две пересекающиеся прямые, которые относительно репера R даются уравнениями

$$a_i:\ -b^3_{ii}x^3+\frac{1}{r}x^4+1=0.$$

Легко видеть, что прямые a_1 и a_2 пересекаются в точке O (

Рассмотрим точку F, $\vec{OF}=\vec{OH}+\vec{HF}$ на прямой ℓ_x. Так

$$\vec{OH}=\left(1-\frac{1}{r^2}\right)\vec{Ox},\quad \vec{HF}=\rho\vec{e}_3,$$

то

$$\vec{OF}=\left(1-\frac{1}{r^2}\right)\vec{Ox}+\rho\vec{e}_3.$$

Из формул (I) и $\omega^\beta_\alpha=0$ следует, что

$$d\vec{F}=\left(1-\frac{1}{r^2}\right)\omega^i\vec{e}_i+d\rho\,\vec{e}_3+\rho\,\omega^i_3\vec{e}_i.$$

Точка F является фокусом семейства прямых ℓ_x тогда и только тогда, когда при некотором смещении точки x по пове хности V_2: $d\vec{F}\parallel\vec{e}_4$, т.е. $\left(1-\frac{1}{r^2}\right)\omega^i+\rho\,\omega^i_3=0$.

Легко показать, что последнее равенство можно записать виде

$$\left(1-\frac{1}{r^2}\right)\omega^i-\rho\, b^3_{ij}\omega^j=0$$

или

$$\left(\left(1-\frac{1}{r^2}\right)\delta^i_j-\rho\, b^3_{ij}\right)\omega^j=0,$$

где $\det\left\|\left(1-\frac{1}{r^2}\right)\delta^i_j-\rho\, b^3_{ij}\right\|=0$.

Считая, что $b^3_{11}\neq0$, $b^3_{22}\neq0$, из последнего равенства находи значения ρ:

$$\rho_1=\frac{1-\frac{1}{r^2}}{b^3_{11}},\qquad \rho_2=\frac{1-\frac{1}{r^2}}{b^3_{22}},$$

которым соответствуют смещения точки x вдоль линий ω^2 или сети Σ_2 соответственно. Заметим, что точки F_1 и F_2, соот ветствующие абсциссам ρ_1 и ρ_2 на прямой ℓ_x, являются точками пересечения этой прямой с прямыми a_1 и a_2, на которые распа лась присоединенная кривая. Таким образом, доказана

Т е о р е м а 3. Пусть поверхность V_2 лежит на гипер сфере $S_3(0,r)\subset E_4$, $r\neq1$. В общем случае точки пересечения пря ℓ_x с присоединенной кривой поверхности V_2 в точке x явля ются фокусами семейства прямых ℓ_x.

Библиографический список

1. С и л а е в Е.В. Геометрия поверхности, лежащей на гиперсфере в евклидовом пространстве // Геометрия погруженных многообразий: Сб. научн. тр. М., 1983. С.99-104.

2. Б а з ы л е в В.Т. Геометрия дифференцируемых многообразий. М., 1989. 222 с.

3. Yano K. Submanifolds with parallel mean Curvature vector of a euclidean space or a sphere // Kōdai Mathematical seminar reports. 1971. V. 23. №1. p. 144-159.

4. С и л а е в Е.В. О скалярной кривизне поверхности, лежащей на гиперсфере в евклидовом пространстве // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат. сб. научн. тр. / Калинингр. ун-т, Калининград, 1982. Вып.13. С.87-90.

УДК 514.7

О ДВОЙНЫХ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ЛИНИЯХ ПАРЫ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЕЙ

Г.М.С и л а е в а

(Московский государственный педагогический университет)

Рассмотрим гиперповерхности V_{n-1}, $\overline{V}_{n-1}$ в n-мерном евклидовом пространстве E_n и диффеоморфизм $f: V_{n-1}\to\overline{V}_{n-1}$. Предположим, что $y=f(x)\neq x, \forall x\in V_{n-1}$, причем конгруэнция прямых xy является ортогональной относительно V_{n-1}. Присоединим к каждой точке x поверхности V_{n-1} подвижной репер $R^x=(x,\vec{e}_i,\vec{e}_n)$ так, чтобы векторы $\vec{e}_i$ $(i,j=1,\dots,n-1)$ принадлежали касательному пространству поверхности V_{n-1} в точке x, а вектор $\vec{e}_n$ направим вдоль вектора $\vec{xy}$. Деривационные формулы репера R^x имеют вид:

$$d\vec{x}=\omega^i\vec{e}_i,\quad d\vec{e}_i=\omega^j_i\vec{e}_j+\omega^n_i\vec{e}_n,\quad d\vec{e}_n=\omega^i_n\vec{e}_i+\omega^n_n\vec{e}_n. \qquad (1)$$

При смещении точки x по поверхности V_{n-1} имеем: $\omega^n=0$. Дифференцируя это равенство внешним образом и применяя лемму Картана, получим:

$$\omega^n_i=b^n_{ij}\,\omega^j,\quad b^n_{ij}=b^n_{ji}. \qquad (2)$$

Можно показать [1], что к каждой точке y присоединен репер $R^y=(y,\vec{e}_i{}',\vec{e}_n)$, где $\vec{e}_i{}'=A^k_i\vec{e}_k+B_i\vec{e}_n$ (3)